



TITLE:

# スケール極限による固定点定理 (調和写像論の深化と展望)

AUTHOR(S):

近藤, 剛史

---

CITATION:

近藤, 剛史. スケール極限による固定点定理 (調和写像論の深化と展望). 数理解析研究所講究録 2010, 1720: 139-149

ISSUE DATE:

2010-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170404>

RIGHT:

# スケール極限による固定点定理 (Fixed point theorems via a scaling limit argument)

近藤 剛史  
神戸大学大学院理学研究科

## 概要

本稿では, 2010 年 6 月 3 日の数理解析研究所での講演に基づき, 井関氏と納谷氏によって [6] で得られた固定点定理に対する, スケール極限を用いた別証明を与える.

## 1 Introduction

井関氏と納谷氏は, 組合せ調和写像を用いた超剛性および固定点定理の研究 [6] の中で, 次の CAT(0) 空間に対する固定点定理を示した.

**定理 1.1** ([6]). 有限生成群  $\Gamma$  が 2 次元の重み付き単体複体  $(X, m_X)$  に幾何学的かつ重みを保つように作用しているとし,  $Y$  を CAT(0) 空間とする. 任意の頂点  $x \in X$  に対して  $\lambda_1(Lk_x, Y) > \frac{1}{2}$  が成り立つならば,  $\Gamma$  は  $Y$  に対する固定点性質を持つ.

ここで一般に重み付きグラフ  $(G, m)$  と CAT(0) 空間  $Y$  に対して Wang の不変量  $\lambda_1(G, Y)$  とは,

$$\lambda_1(G, Y) = \inf_{\varphi: G \rightarrow Y} \frac{\frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in E} m(u,v) \operatorname{dist}_Y(\varphi(u), \varphi(v))^2}{\sum_{v \in V} m(v) \operatorname{dist}_Y(\varphi(v), \bar{\varphi})^2}$$

として定義される量である. ここで  $\inf$  は全ての非定値写像  $\varphi: G \rightarrow Y$  にわたってとり,  $\bar{\varphi}$  は  $G$  の頂点の重みを測度だと思った時の,  $\varphi$  による像測度の重心である.  $Lk_x$  は点  $x$  におけるリンクを表し, その辺および頂点の重みは,  $X$  の上の重み  $m_X$  を用いてそれぞれ  $m_{Lk_x}(v, u) := m_X(x, v, u)$ ,  $m_{Lk_x}(v) := m_X(x, v)$  によって定義される. また  $X$  の重み  $m_X$  は admissible, すなわち  $m_X(u, v) = \sum_{w \in X} m_X(u, v, w)$ ,  $m_X(u) = \sum_{v \in X} m_X(u, v)$  が任意の頂点  $u, v \in X$  で成り立っているとする.

この定理のオリジナルの証明は Jost-Mayer による勾配流を用いるものであったが, Gromov が [3] で考えているスケール極限の議論を用いることで, 比較的簡単な別証明を与えることができるので, ここで紹介する.

## 2 概念の準備

この章では, 定理の主張を正確に述べるために重み付き可算集合, CAT(0) 空間, Wang の不変量などの概念を導入し, 証明で必要な超極限の定義をする.

重み付き可算集合は、任意の 3 点上に重みが定義されているような可算集合のことで、重み付きの 2 次元単体複体を少し一般化したものと思うことができる。この枠組で定理を述べることで少しだけ定理が強くなっており、この一般化は [4] でランダム群の固定点性質を示す際には本質的であったが、本稿においては証明がすっきり記述できるためにこの枠組を用いることにする。

## 2.1 重み付き可算集合と群作用

$X$  を可算集合とし、 $m : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を以下の条件を満たす関数とする。

1.  $m$  は変数の置換に関して不変である。つまり、 $m(x, y, z) = m(y, x, z) = m(x, z, y)$  が成り立つ。
2. 任意の  $x \in X$  に対して、 $\#\{(y, z) \in X \times X \mid m(x, y, z) > 0\} < \infty$ 。
3. 任意の  $x_1, x_2 \in X$  に対して、点列  $y_0 = x_1, y_1, y_2, \dots, y_n = x_2$  と、 $z_1, \dots, z_n$  が存在して、任意の  $1 \leq i \leq n$  に対して、 $m(y_{i-1}, y_i, z_i) > 0$  が成り立つ。

このとき、 $m$  を  $X$  上の重みと言い、ペア  $(X, m)$  を重み付き可算集合と呼ぶことにする。

$m$  がもし集合  $\{(x, y, z) \in X \times X \times X \mid x = y \text{ または } y = z \text{ または } z = x\}$  上で消えていたら、 $m(x, y, z) > 0$  を満たす三点を 2 単体とみなすことで、自然に  $X$  を頂点集合とする 2 次元単体複体に対応させることができる。このとき二つ目の条件は局所有限性、三つ目の条件は連結性に対応している。

重み  $m$  は 3 点集合上の重みであったが、これを用いて 2 点や 1 点の重み (これらも同じ記号  $m$  で表す) を  $m(x, y) := \sum_{z \in X} m(x, y, z)$ ,  $m(x) := \sum_{y \in X} m(x, y)$  として定義しておく。これらの和は  $m$  の二つ目の条件により、実際は有限和である。ただし、3 点、2 点、1 点の重み  $m$  を区別したい時は、それぞれ  $m^2, m^1, m^0$  と表記することにする。添字は対応する単体の次元を念頭においているため、変数の個数より 1 小さいことに注意しておく。

$X$  の点  $x \in X$  におけるリンク  $Lk_x$  とは、集合  $\{y \in X \mid m(x, y) > 0\}$  のことで、その上の 2 点の重みを  $m_x(y, z) := m(x, y, z)$  とし、1 点の重みを  $m_x(y) := m(x, y)$  として定義する。リンクは、条件 2 により有限集合である。

有限生成群  $\Gamma$  の  $(X, m)$  への作用が固有不連続 (あるいは真性不連続) であるとは、任意の有限集合  $A \subset X$  に対して、 $\#\{\gamma \in \Gamma \mid A \cap \gamma A \neq \emptyset\} < \infty$  が成り立つこととし、 $\Gamma$  の  $(X, m)$  への作用が幾何学的であるとは、固有不連続かつ余有限 (商集合が有限) であることとする。

今の場合、 $\Gamma$  の  $(X, m)$  への作用が固有不連続であることと、 $X$  の任意の点の固定化部分群の位数が有限であることは同値である。

上で述べたように、重み付き可算集合の典型的な例は、2 次元の単体複体であるが、単体複体に作用している群の典型的な例として、 $PGL(n, \mathbb{Q}_p)$  の格子がある。この場合、格子は Bruhat-Tits ビルディングと呼ばれる  $n - 1$  次元の単体複体に単体的に作用していて、一様格子の作用は幾何学的である。(実際は  $PGL(n, \mathbb{Q}_p)$  の全ての格子は一様格子である [8].)

## 2.2 CAT(0) 空間

**定義 2.1** (CAT(0) 空間). 完備距離空間  $(Y, d)$  が以下の条件を満たすとき, CAT(0) 空間であるという.

1.  $Y$  の任意の 2 点は測地線, すなわち区間の等長埋め込みによって結ぶことができる.
2. 任意の 3 点  $x, y, z \in Y$  と  $y$  と  $z$  を結ぶ測地線  $\gamma: [0, l] \rightarrow Y; \gamma(0) = y, \gamma(l) = z$  に対して,  $0 \leq t \leq 1$  のとき,

$$d(x, \gamma(tl))^2 \leq (1-t)d(x, y)^2 + td(x, z)^2 - t(1-t)d(y, z)^2$$

が成り立つ.

一つ目の条件を満たす完備距離空間を測地空間と言う. 二つ目の条件の不等式は, ユークリッド平面の三角形に対しては等式となることに注意しておく. したがって, 標語的には, CAT(0) 空間とは任意の測地三角形がユークリッド平面の三角形と比べて太くないような測地空間と言うことができる.

CAT(0) 空間の例としては, Hilbert 空間, tree, Hadamard 多様体 (即ち, 断面曲率が 0 以下の完備, 単連結リーマン多様体), ユークリッド的ビルディングなどが挙げられる.

CAT(0) 空間  $Y$  上の, 台が有限の測度  $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i \delta_{x_i}$  の重心とは,  $Y$  上の関数  $y \mapsto \sum_{i=1}^n \nu_i d(y, x_i)^2$  の唯一の最小点のこととし,  $\bar{\nu}$ , あるいは  $c(\nu)$  と書く. 重心はより一般の測度に対しても定義できるが, ここでは必要ないので省略することにする.

CAT(0) 空間について, 詳しくは [1] を見よ.

## 2.3 Wang の不変量 $\lambda_1(G, Y)$

有限集合  $G$  と, 関数  $m: G \times G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  であつて,  $m(u, v) = m(v, u)$  を満たすもののペア  $(G, m)$  のことを重み付きグラフと言うことにする.

この定義はあまり標準的ではないと思われるが,  $G$  自身を頂点集合だと思い,  $m(u, v) > 0$  となる 2 点が辺で結ばれていると思うことで, ループを許容する有限無向グラフが対応しているので, こう呼んでいる. このように定義しておくことで, 重み付き可算集合  $(X, m)$  の, 点  $x \in X$  におけるリンク  $Lk_x$  とその上の重み  $m_x$  のペアは重み付きグラフとなる.

また, 先程と同様に 1 点の重みを  $m(u) := \sum_{v \in G} m(u, v)$  と定義しておく.

**定義 2.2** ([12], [6]). 重み付きグラフ  $(G, m)$  と CAT(0) 空間  $Y$  に対して Wang の不変量  $\lambda_1(G, Y)$  とは,

$$\lambda_1(G, Y) = \inf_{\varphi: G \rightarrow Y} \frac{\frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in G \times G} m(u, v) \text{dist}_Y(\varphi(u), \varphi(v))^2}{\sum_{v \in G} m(v) \text{dist}_Y(\varphi(v), \bar{\varphi})^2}$$

として定義される量である. ただし,  $\varphi$  は  $G$  から  $Y$  への非定値写像全体を動き,  $\bar{\varphi}$  は  $m^0$  を  $V$  上の測度だと思った時の  $\varphi$  による像測度  $\sum_{v \in G} m(v) \delta_{\varphi(v)}$  の重心のこととする.

また,  $\lambda_1(G, Y)$  は, Poincaré タイプの不等式

$$\sum_{v \in G} m(v) \operatorname{dist}_Y(\varphi(v), \bar{\varphi})^2 \leq \frac{1}{2\lambda} \cdot \sum_{(u,v) \in G \times G} m(u, v) \operatorname{dist}_Y(\varphi(u), \varphi(v))^2$$

が任意の写像  $\varphi: G \rightarrow Y$  について成立するような  $\lambda$  の上限と言うこともできる. (ただし, このような  $\lambda$  が存在しない時は 0 と考える.)

$Y = \mathbb{R}$  の時は  $\lambda_1(G, \mathbb{R})$  は重み付きグラフの組合せラプラシアン

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{y \in X} \frac{m(x, y)}{m(x)} \varphi(y)$$

の第二固有値に等しい. ここで, グラフのラプラシアンは半正定値であり, 有限グラフの時は常に 0 を固有値に持つが, 0 が重根の時は 0, そうでない時は正の最小固有値のことを第二固有値と言っている. このため, Wang の不変量  $\lambda_1(G, Y)$  はスペクトルギャップの非線形の (より正確には CAT(0) での) 類似物と思うことができる.  $\lambda_1(G, \mathbb{R})$  のことを  $\mu_1(G)$  と書くと, 一般に

$$\lambda_1(G, Y) \leq \mu_1(G)$$

が成り立つことが容易に分かる.

$\mu_1$  は行列の固有値になるので, 具体的な計算例が多く知られているが, 一般に Wang の不変量を下から評価することは非常に難しい. しかし, 井関氏と納谷氏は CAT(0) 空間に対して, 井関納谷不変量  $\delta$  を導入し,

$$(1 - \delta(Y))\mu_1(G) \leq \lambda_1(G, Y) \leq \mu_1(G)$$

が成り立つことを示した. これを用いると,  $\delta$  を上から評価すれば Wang の不変量を下から評価することができる. 例えば, 次のような評価が知られている ([6], [5]).

(1)  $Y$  が Hilbert 空間, tree, Hadamard 多様体の時,  $\delta(Y) = 0$ .

(2)  $I_p$  を  $PGL(3, \mathbb{Q}_p)$  に付随する Bruhat-Tits ビルディングとすると,

$$\frac{(\sqrt{p} - 1)^2}{2(p - \sqrt{p} + 1)} \leq \delta(I_p) \leq \frac{3}{4}.$$

したがって, 特に  $Y$  が Hilbert 空間, tree, Hadamard 多様体の時には  $\lambda_1(G, Y) = \mu_1(G)$  が成り立つことが分かる. さらに,  $G$  として例えば  $PGL(3, \mathbb{Q}_p)$  に付随する Bruhat-Tits ビルディングのリンクを考えると,  $\mu_1(G) = 1 - \sqrt{p}/(p+1)$  となることが [2] によって示されているので,  $\lambda_1(G, Y) > 1/2$  となる例を見つけることができる. Wang の不変量, 井関納谷不変量を評価することは, 固定点定理が適用できる具体例を見つけるためには重要であるが, 本稿の目的からはそれるので, より詳しくは, [6], [7], [5], [10], [11] を参照されたい.

## 2.4 超極限

**定義 2.3.**  $\mathbb{N}$  の冪集合上定義される有限加法的集合関数  $\omega$  が非単項超フィルターであるとは, 次を満たすこととする.

1. 任意の  $A \subset \mathbb{N}$  に対して  $\omega(A)$  は 0 または 1 であり,  $\omega(\mathbb{N}) = 1$  である.
2. 任意の有限集合  $A \subset \mathbb{N}$  に対して,  $\omega(A) = 0$  となる.

非単項超フィルター  $\omega$  を用いると, 任意の有界関数  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して, その極限 ( $\lim_{\omega} \varphi(i)$  または  $\varphi(\omega)$  と書く) が次の条件によって一意的に定まる. 任意の実数  $\epsilon > 0$  に対して,  $\varphi$  の像が  $\varphi(\omega)$  の  $\epsilon$  近傍に入る自然数の集合, すなわち

$$I_{\epsilon} := \{i \in \mathbb{N} \mid |\varphi(i) - \varphi(\omega)| \leq \epsilon\}$$

が  $\omega(I_{\epsilon}) = 1$  を満たす. この極限  $\lim_{\omega} \varphi(i)$  は通常の極限  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(i)$  が存在する時には  $\omega$  によらずにこれに一致する.

次に, 基点付き距離空間の列  $\{(X_n, \text{dist}_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  に対して, その超極限  $(X_{\omega}, \text{dist}_{\omega}, x_{\omega})$  を定義しよう. 点列  $(g_n), g_n \in X_n$  であって, 基点からの距離が有界であるもの, つまり, ある定数  $c$  が存在して  $\text{dist}_n(g_n, x_n) \leq c$  を満たすものの全体の集合  $\mathcal{F}$  を考える. 二つの列  $(f_n), (g_n) \in \mathcal{F}$  が同値であるとは,  $\lim_{\omega} \text{dist}_n(f_n, g_n) = 0$  が成り立つこととする. 点列  $(f_n) \in \mathcal{F}$  が定める同値類を  $(f_n)^{\omega}$  で表すことにする. 集合  $X_{\omega}$  は, この同値関係による同値類の集合  $\mathcal{F}/\sim$  であり,  $X_{\omega}$  の上の距離は,  $\text{dist}_{\omega}((f_n)^{\omega}, (g_n)^{\omega}) := \lim_{\omega} \text{dist}_n(f_n, g_n)$  として定義する. 基点  $x_{\omega}$  は基点の列  $(x_n)$  の同値類とする.

CAT(0) 空間の列を考えると, その超極限もまた CAT(0) 空間になることが容易に確かめられる.

**命題 2.4** ([4], Proposition 4.2).  $(G, m)$  を重み付きグラフ,  $(Y_n, \text{dist}_n, y_n)$  を基点付きの CAT(0) 空間の列とし,  $\omega$  を  $\mathbb{N}$  上の非単項超フィルターとする. このとき, 超極限  $(Y_{\omega}, \text{dist}_{\omega}, y_{\omega})$  の Wang の不変量について,

$$\lambda_1(G, Y_{\omega}) \geq \lim_{\omega} \lambda_1(G, Y_n)$$

が成り立つ.

### 3 固定点定理とスケール極限による証明

ここでは,  $\Gamma$  の  $X$  への作用が固有不連続より強く, 自由であるという仮定の下で定理を示す. 固有不連続な場合の証明をするには技術的な変更が必要であるが, スケール極限を用いる部分に関しては全く同じであるので, まず自由な作用の場合に証明し, 後に固有不連続な作用の場合の変更点のみ記述することにする.

**定理 3.1.**  $(X, m)$  を重み付き可算集合とし, 群  $\Gamma$  が  $X$  へ重みを保ち, 余有限, 自由に作用しているとし,  $Y$  を CAT(0) 空間とする.  $X$  の任意の点  $x$  に対して,

$$\lambda_1(Lk_x, Y) > \frac{1}{2}$$

であるとする,  $\Gamma$  は  $Y$  に対する固定点性質を持つ.

*Proof.* 示すべきことは,  $\Gamma$  の CAT(0) 空間  $Y$  への任意の等長作用が固定点を持つことである. まず, 等長作用  $\Gamma \curvearrowright Y$  を任意に固定する.  $X$  から  $Y$  への  $\Gamma$  同変写像全体の空間を  $\mathcal{E} := \{\varphi : X \rightarrow Y \mid \Gamma \text{同変写像}\}$  とし, ここにエネルギー汎関数  $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を,

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in X \times X / \Gamma} m(u,v) \text{dist}_Y(\varphi(u), \varphi(v))^2$$

として定める. ここで  $X \times X / \Gamma$  は  $X \times X$  への  $\Gamma$  の対角作用による商集合である. 作用  $\Gamma \curvearrowright Y$  が固定点を持つことと, 写像  $\varphi \in \mathcal{E}$  が存在して  $E(\varphi) = 0$  となることが同値であることが分かる. したがって示すべきことはエネルギーが 0 の同変写像の存在となる.

ここで, 写像  $\varphi \in \mathcal{E}$  が調和写像であるということを, 任意の  $x \in X$  に対して  $\varphi(x)$  が  $\varphi_*(m_x^0)$  の重心と一致することとして定義する.  $m_x^0$  とは,  $x$  でのリンクの頂点に定まる重みで, これを頂点上の測度だと思って  $\varphi$  による像測度を考えたものが  $\varphi_*(m_x^0)$  である. (この調和写像の定義は Gromov [3] によるもので, 井関氏と納谷氏 [6] によるものとは一見異なるように見えるが, 実は同値である.) すると, 写像  $\varphi \in \mathcal{E}$  が  $E$  を最小化するならば,  $\varphi$  は調和写像であることが容易に分かる.

そこでまず,  $\Gamma$  同変調和写像が存在すると仮定すると, そのエネルギーは 0 しかとり得ないことを示そう.

写像  $\varphi : X \rightarrow Y$  を  $\Gamma$  同変調和写像とすると,

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= \frac{1}{2} \sum_{(v,w) \in (X \times X) / \Gamma} m(v,w) \text{dist}_Y(\varphi(v), \varphi(w))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v \in X / \Gamma} \left( \sum_{w \in X} m(v,w) \text{dist}_Y(\varphi(v), \varphi(w))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v \in X / \Gamma} \left( \sum_{w \in X} m_v(w) \text{dist}_Y(c(\varphi_* m_v^0), \varphi(w))^2 \right) \quad (\text{調和写像であることから}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v \in X / \Gamma} \left( \sum_{w \in Lk(v)} m_v(w) \text{dist}_Y(c(\varphi_* m_v^0), \varphi(w))^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{v \in X / \Gamma} \frac{1}{\lambda_1(Lk_v, Y)} \left( \sum_{w_1, w_2 \in Lk(v)} m_v(w_1, w_2) \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \right) \quad (\lambda_1 \text{の定義}) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{v \in X / \Gamma} \left( \sum_{w_1, w_2 \in Lk(v)} m_v(w_1, w_2) \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \right) \quad (\lambda_1 > 1/2 \text{より}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v \in X / \Gamma} \left( \sum_{w_1, w_2 \in X} m_v(w_1, w_2) \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(w_1, w_2) \in (X \times X) / \Gamma} m(w_1, w_2) \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \\ &= E(\varphi). \end{aligned}$$

ここで,  $\varphi$  が定値写像でないとする, 二つ目の不等式が真の不等号となるので, このようなこ

とは起こり得ないことがわかる。したがって  $\varphi$  は定値写像となり、 $E(\varphi) = 0$  となることが分かった。

次に  $\Gamma$  同変調和写像の存在が問題となる。エネルギーを最小化する写像は調和写像であったので、エネルギー最小写像の存在を示せばよいが、そのためにスケール極限を用いる。

背理法を用いて、エネルギー最小写像が存在しないと仮定し、スケール極限空間への作用を調べることで矛盾を引き出すという流れで示す。エネルギーの下限が正か 0 かで場合分けする。

まず、エネルギー  $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が最小値を持たないと仮定して、 $\inf_{\varphi \in \mathcal{E}} E(\varphi) > 0$  となる場合を考えよう。エネルギー  $E$  の最小化列  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  をとり、点  $x_0 \in X$  を固定する。  $Y$  の基点の列を  $y_n = \varphi_n(x_0)$  と定め、 $\mathbb{N}$  上の任意の非単項超フィルター  $\omega$  を取ってきて、超極限  $Y_\infty = \lim_\omega (Y, \text{dist}_Y, y_n)$  を考える。つまり、距離空間は変えずに基点だけ動かした極限である。  $Y_\infty$  もまた  $\text{CAT}(0)$  空間であり、 $Y$  への  $\Gamma$  作用は自然に  $Y_\infty$  への  $\Gamma$  作用を誘導し、極限写像  $\varphi_\infty : X \rightarrow Y_\infty$  を  $\varphi_\infty(x) := (\varphi_n(x))^\omega$  として定義すると、これも  $\Gamma$  同変となり、そのエネルギーは

$$\begin{aligned} E(\varphi_\infty) &= \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in X \times X/\Gamma} m(u,v) \text{dist}_{Y_\infty}(\varphi_\infty(u), \varphi_\infty(v))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in X \times X/\Gamma} m(u,v) \lim_\omega \text{dist}_Y(\varphi_n(u), \varphi_n(v))^2 \\ &= \lim_\omega E(\varphi_n) \\ &= \inf_{\varphi \in \mathcal{E}} E(\varphi) \end{aligned}$$

となる。つまり、極限空間にはエネルギーの下限を実現する  $\Gamma$  同変写像が見つかる。さらに、 $\Gamma$  から  $Y_\infty$  への任意の同変写像のエネルギーは  $\inf_{\varphi \in \mathcal{E}} E(\varphi)$  以上であることが分かるので、 $\varphi_\infty$  はエネルギー最小写像であり、したがって調和写像である。一方で命題 2.4 と仮定の  $\lambda_1(Lk_x, Y) > \frac{1}{2}$  から、極限空間でも  $\lambda_1(Lk_x, Y_\infty) > \frac{1}{2}$  が成立していることに注意すると、前の議論により調和写像のエネルギーは 0 しか取り得ないので矛盾する。したがって  $\inf_{\varphi \in \mathcal{E}} E(\varphi) > 0$  とはなり得ないことが分かる。

次に  $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が最小値を持たないという仮定のもとで、 $\inf_{\varphi \in \mathcal{E}} E(\varphi) = 0$  となる場合を考える。  $\Gamma$  の有限生成集合  $S$  を固定し、 $Y$  上の displacement function  $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\xi(y) = \max_{\gamma \in S} \text{dist}_Y(\gamma y, y)$$

と定めると、仮定により  $\xi > 0$  かつ  $\inf_{y \in Y} \xi(y) = 0$  となっている。このとき、次が成り立つ。

**補題 3.2.**  $\Gamma$  の  $Y$  への作用は上の条件を満たすとする。任意の自然数  $M > 1$  に対して  $r > 0$  と  $y_M \in Y$  が存在して、 $\xi(y_M) = \frac{r}{M}$  かつ任意の  $y \in B(y_M, r)$  に対して  $\xi(y) \geq \frac{r}{2M}$  が成り立つ。

各  $M \in \mathbb{N}$  に対して  $y_M \in Y$  を上の補題のようにとり、 $r_M$  を対応する  $r > 0$  とする。  $\omega$  を  $\mathbb{N}$  上の任意の非単項超フィルターとし、 $\check{Y}$  を超極限  $\lim_\omega (Y, \frac{r_M}{M} \text{dist}_Y, y_M)$  とする。極限空間  $\check{Y}$  は  $\Gamma$  が等長に作用する  $\text{CAT}(0)$  空間で、displacement function  $\check{\xi}$  は

$$\inf_{y \in \check{Y}} \check{\xi}(y) \geq \frac{1}{2}$$



を満たす. したがって,  $X$  から  $\check{Y}$  への  $\Gamma$  同変写像全体の空間  $\mathcal{E}$  上でエネルギーは

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{E}} E(\varphi) > 0$$

を満たす.  $\lambda_1(Lk_x, \check{Y}) > \frac{1}{2}$  に注意すると, 前の議論によりこれも不可能であることが分かる.

以上により  $E: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が最小値を持つことが分かり, エネルギー 0 の同変写像の存在がしたがう.

□

## 4 作用が幾何学的な場合

前章では,  $\Gamma$  の  $X$  への作用は自由であると仮定したが, ここではより一般に  $\Gamma$  が幾何学的に作用している状況を扱う. この場合には  $X$  の各単体 (各有限部分集合) は有限の固定化部分群を持つので,  $X$  から  $Y$  への  $\Gamma$  同変写像に対するエネルギーは, 固定化部分群の位数を考慮に入れて,

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in X \times X/\Gamma} \text{dist}_Y(\varphi(x), \varphi(y))^2 \frac{m(x,y)}{|\Gamma_{(x,y)}|}$$

と定める.

固定化部分群を考慮にいたした計算で重要なのは次の補題である. 本質的にはこの補題を繰り返し用いることで対応する計算が可能になる.

**補題 4.1** ([6] の Lemma 2.2).  $X$  を  $\Gamma$  が作用する可算集合とし,  $\Phi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\Gamma$  不変な関数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\sum_{(x,y) \in X \times X/\Gamma} \frac{\Phi(x,y)}{|\Gamma_{(x,y)}|} = \sum_{x \in X/\Gamma} \frac{1}{|\Gamma_x|} \sum_{y \in X} \Phi(x,y).$$

**定理 4.2.**  $(X, m)$  を重み付き可算集合とし, 群  $\Gamma$  が  $X$  へ重みを保ち, 幾何学的に作用しているとする.  $Y$  を CAT(0) 空間とする.  $X$  の任意の点  $x$  に対して,

$$\lambda_1(Lk_x, Y) > \frac{1}{2}$$

であるとする,  $\Gamma$  は  $Y$  に対する固定点性質を持つ.

*Proof.* 証明は定理 3.1 とほとんど同様に進むが, 調和写像が存在するという仮定の下で, そのエネルギーは 0 しかとり得ないことを示す部分のみが変更を要する.

写像  $\varphi: X \rightarrow Y$  を  $\Gamma$  同変調和写像とすると,

$$\begin{aligned}
E(\varphi) &= \frac{1}{2} \sum_{(v,w) \in (X \times X)/\Gamma} \frac{m(v,w)}{|\Gamma_{(v,w)}|} \text{dist}_Y(\varphi(v), \varphi(w))^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{v \in X/\Gamma} \frac{1}{|\Gamma_v|} \left( \sum_{w \in X} m(v,w) \text{dist}_Y(\varphi(v), \varphi(w))^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{v \in X/\Gamma} \frac{1}{|\Gamma_v|} \left( \sum_{w \in X} m_v(w) \text{dist}_Y(c(\varphi_* m_v^0), \varphi(w))^2 \right) \quad (\text{調和写像であることから}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{v \in X/\Gamma} \frac{1}{|\Gamma_v|} \left( \sum_{w \in Lk(v)} m_v(w) \text{dist}_Y(c(\varphi_* m_v^0), \varphi(w))^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{4} \sum_{v \in X/\Gamma} \frac{1}{|\Gamma_v|} \cdot \frac{1}{\lambda_1(Lk_v, Y)} \left( \sum_{w_1, w_2 \in Lk(v)} m_v(w_1, w_2) \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \right) \quad (\lambda_1 \text{ の定義}) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{v \in X/\Gamma} \frac{1}{|\Gamma_v|} \left( \sum_{w_1, w_2 \in Lk(v)} m_v(w_1, w_2) \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \right) \quad (\lambda_1 > 1/2 \text{ より}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{v \in X/\Gamma} \frac{1}{|\Gamma_v|} \left( \sum_{w_1, w_2 \in X} m_v(w_1, w_2) \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{v \in X/\Gamma} \left( \sum_{w_1, w_2 \in X} m(v, w_1, w_2) \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \frac{1}{|\Gamma_{(v, w_1, w_2)}|} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(w_1, w_2) \in (X \times X)/\Gamma} \left( \sum_{v \in X} \frac{m(v, w_1, w_2)}{|\Gamma_{(v, w_1, w_2)}|} \right) \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(w_1, w_2) \in (X \times X)/\Gamma} \left( \frac{\text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2}{|\Gamma_{(w_1, w_2)}|} \sum_{v \in X} m(v, w_1, w_2) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(w_1, w_2) \in (X \times X)/\Gamma} \frac{m(w_1, w_2)}{|\Gamma_{(w_1, w_2)}|} \text{dist}_Y(\varphi(w_1), \varphi(w_2))^2 \\
&= E(\varphi).
\end{aligned}$$

前節の証明と同様に、ここで  $\varphi$  が定値写像でないとすると、二つ目の不等式が真の不等号となるので、このようなことは起こり得ないことがわかる。したがって  $\varphi$  は定値写像となり、 $E(\varphi) = 0$  となることが分かった。

残りの議論は定理 3.1 と同じである。

□

**注意 4.3.** 定理のターゲットの空間  $Y$  として Hilbert 空間を考えた時は、固定点性質は性質 (T) と同値であり、Žuk の定理 [13] と一致する。しかし、その証明はユニタリー表現を用いるもので、井関氏、納谷氏による証明ともここでの証明とも異なる。

注意 4.4. 井関氏と納谷氏は [6] において,  $X$  の任意の 1 単体  $(x_1, x_2)$  に対して

$$\lambda_1(Lk_{x_1}, Y) + \lambda_1(Lk_{x_2}, Y) > 1$$

が成り立つという, より弱い条件下でも固定点定理が成立することを指摘している. しかし, 現在の所, この条件下での固定点定理にスケール極限を用いた証明を与えることはできていない.

注意 4.5. 固定点定理の仮定に現われる  $1/2$  は最良の値であることが,  $X$  と  $Y$  として  $\tilde{A}_2$  型のコクセター複体をとることで分かる. つまり, この場合  $\lambda_1(Lk_x, Y) = \frac{1}{2}$  であって,  $\Gamma$  として  $\tilde{A}_2$  型のコクセター群を考えると固定点性質を持たない. では  $\lambda_1(Lk_x, Y) \geq \frac{1}{2}$  が一般に成り立つのか, 更に,  $\lambda_1(Lk_x, Y) = \frac{1}{2}$  が成り立つ時に, 何らかの意味での  $X$  から  $Y$  への  $\Gamma$  同変な埋め込みがあるのかといった問題は幾何学的超剛性の視点からは気になる問いであるが,  $Y$  をユークリッド的ビルディングに限っても, 一般的には成り立たない. 例えば,  $X, Y$  をそれぞれ,  $PGL(3, \mathbb{Q}_p), PGL(3, \mathbb{F}_p((t)))$  に付随するユークリッド的ビルディングとすると,  $\mathbb{Q}_p$  と  $\mathbb{F}_p((t))$  は剰余体の位数が等しいため, これらのビルディングは同じリンクを持ち, 全ての頂点  $x$  で  $\lambda_1(Lk_x, Y) \leq \frac{1}{2}$  が成り立つが, Margulis により固定点定理が成り立つことが示されているので,  $X$  から  $Y$  への埋め込みは存在しない. ちなみに, この二つのビルディングは, 半径が 2 のボールを考えると見分けることができることが Tits ([9]) によって示されている.

## 参考文献

- [1] M. R. Bridson, A. Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [2] W. Feit, G. Higman, The nonexistence of certain generalized polygons. J. Algebra 1 (1964) 114–131.
- [3] M. Gromov, Random walk in random groups, GAFA. 13 (2003), No.1, 73–146.
- [4] H. Izeki, T. Kondo, S. Nayatani, Fixed-point property of random groups, Ann. Global Anal. Geom. 35 (2009), no. 4, 363–379.
- [5] H. Izeki, T. Kondo, S. Nayatani, N-step energy of maps and fixed-point property of random groups, preprint.
- [6] H. Izeki, S. Nayatani, Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces, Geometriae Dedicata 114 (2005), 147–188.
- [7] P. Pansu, Superrigidité géométrique et applications harmoniques, preprint, 2007.
- [8] T. Tamagawa, On discrete subgroups of  $p$ -adic algebraic groups. Arithmetical Algebraic Geometry (1965), 11–17.
- [9] Tits, Jacques, Spheres of radius 2 in triangle buildings. I. Finite geometries, buildings, and related topics, 17–28, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1990.

- [10] T. Toyoda, CAT(0) spaces on which a certain type of singularity is bounded, to appear in Kodai math. J.
- [11] T. Toyoda, Fixed point property for a geodesically complete cocompact CAT(0) space, preprint.
- [12] M. T. Wang, Generalized harmonic maps and representations of discrete groups. Comm. Anal. Geom. 8 (2000), no. 3, 545–563.
- [13] A. Żuk, Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups. Geom. Funct. Anal. 13 (2003), no. 3, 643–670.